Lineare Gleichungssysteme

6.14 Def: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist eine Gleichung der Form

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$, $\underline{x} \in K^n$, $\underline{b} \in K^m$.

(Explizit:
$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots\cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots\cdots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$
)

Dabei sind A und $\underline{b}$ fixiert; gesucht werden alle möglichen Werte für $\underline{x}$.

$$\mathcal{L}(A,\underline{b}) := \{\underline{x} \in K^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b}\}$$
$$\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}(A,\underline{0})$$

Ein LGS mit $\underline{b} = \underline{0}$ heißt homogen.

6.15 Satz: Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ ist $\mathcal{L}(A) \subseteq K^n$ ein UVR der Dimension $n - \mathrm{rk}(A)$.

Beweis:

$$\mathcal{L}(A) = \{\underline{x} \in K^n \mid \underbrace{A \cdot \underline{x}}_{f_A(\underline{x})} = \underline{0}\}$$

$$= \ker(f_A)$$

ist ein UVR nach Satz 4.16.

Nach Rangsatz 5.17 gilt:

$$\mathrm{rk}(f_A) = n - \dim(\ker(f_A)),$$

also

$$\mathrm{rk}(A) = n - \dim \mathcal{L}(A) \qquad \square$$

6.16 Korollar: Jedes homogene LGS mit mehr Unbekannten als Zeilen (d.h. $n > m$) besitzt mindestens eine Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Beweis:

$\operatorname{im}(f_A) \subseteq K^m$, also

$\operatorname{rk}(A) \; (= \dim(\operatorname{im}(f_A))) \leq m$.

Also folgt nach 6.15 und Vor.

$$\dim \mathcal{L}(A) > 0$$ $\square$

Bsp:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$n = 3 > 2 = m.$$

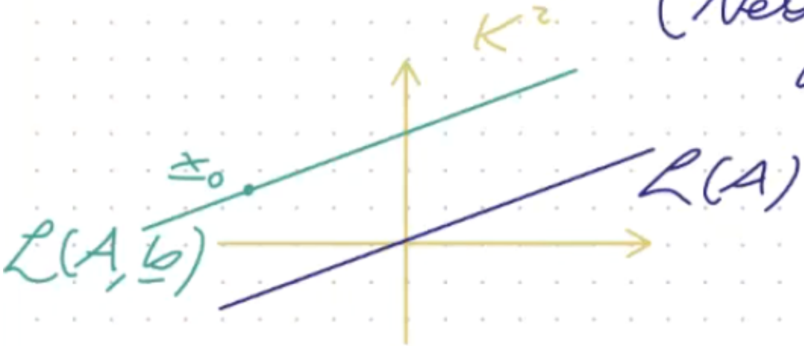
Eine Lösung $\neq \underline{0}$ ist z.B.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6.17 Satz: Existiert eine Lösung $\underline{x}_0 \in \mathcal{L}(A, \underline{b})$, so ist

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \underline{x}_0 + \mathcal{L}(A)$$

(Nebenklasse von $\mathcal{L}(A)$ in K^n)



Beweis zu 6.17:

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = f_A^{-1}(\underline{b})$$

$$= f_A^{-1}(f_A(\underline{x}_0))$$

$$\overset{\text{Satz 2.23}}{=} \underline{x}_0 + \mathcal{L}(A).$$

$\square$

Beispiele:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \{\underline{0}\}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \emptyset$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$$